

CHUYÊN ĐỀ TÍCH PHÂN*ThS. Lê Khắc Sơn***Bảng công thức tích phân bất định:**

$$\begin{aligned}
\int 0 dx &= C & \int dx &= x + C & \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1 & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\
\int e^x dx &= e^x + C & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C & \int \sin x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \sin x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= -\cot x + C & \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx &= \ln|u(x)| + C \\
\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C & \int \sqrt{x^2 + a} dx &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C
\end{aligned}$$

Phương pháp biến số phụ :

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ có nguyên hàm là $F(x)$.

Giả sử $u(x)$ là hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[\alpha, \beta]$ và có miền giá trị là $[a; b]$ thì ta có :

$$\int f[u(x)]u'(x)dx = F(x)[u(x)] + C$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau:

a) $I_1 = \int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 1}$

b) $I_2 = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$

c) $I_3 = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x} dx}{x}$

Bài làm :

a) Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$.

Đổi cận : $\begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=2 \end{cases}$

Vậy : $I_1 = \int_1^2 \frac{xdx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \ln 2$

b) Đặt $t = e^x - 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=e-1 \\ x=2 \rightarrow t=e^2-1 \end{cases}$

Vậy : $I_2 = \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x - 1} = \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{e-1}^{e^2-1} = \ln(e+1)$

c) Đặt $t = 1 + \ln x \Rightarrow t dt = \frac{1}{x} dx$

Đổi cận : $\begin{cases} x=1 \rightarrow t=1 \\ x=e \rightarrow t=2 \end{cases}$

$I_3 = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln x} dx}{x} = \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$

Tích phân lượng giác :

Dạng 1 : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sin mx \cdot \cos nx dx$

Cách làm: biến đổi tích sang tổng .

Dạng 2 : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$

Cách làm :

Nếu m, n chẵn . Đặt $t = \tan x$

Nếu m chẵn n lẻ . Đặt $t = \sin x$ (trường hợp còn lại thì ngược lại)

Dạng 3 : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + c}$

Cách làm :

Đặt : $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Dạng 4 : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x} \cdot dx$

Cách làm :

Đặt : $\frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x} = A + \frac{B(c \cdot \cos x - d \cdot \sin x)}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x}$

Sau đó dùng đồng nhất thức .

Dạng 5 : $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + m}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x + n} \cdot dx$

Cách làm :

Đặt : $\frac{a \cdot \sin x + b \cdot \cos x + m}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x + n} = A + \frac{B(c \cdot \cos x - d \cdot \sin x)}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x + n} + \frac{C}{c \cdot \sin x + d \cdot \cos x + n}$

Sau đó dùng đồng nhất thức.

BÀI TẬP**Tính tích phân :**

a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x + 1)^4}$

b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$

c) $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx$

Bài làm :

a) Đặt : $t = \sin x + 1 \Rightarrow dt = \cos x dx$ Đổi cận : $\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 2 \end{cases}$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(\sin x + 1)^4} = \int_1^2 \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} \Big|_1^2 = \frac{7}{24}$$

$$\text{b) Đặt : } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \quad \text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1+t^4-2t^2) dt = \int_0^1 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{2}{3}t^3 + t \right) dt = \frac{8}{15}$$

$$\text{c) Đặt : } t = \tan x \Rightarrow dt = (\tan^2 x + 1) dx \quad \text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{4} \rightarrow t=1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^6 x dx = \int_0^1 \frac{t^6 dt}{t^2+1} = \int_0^1 \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 x + b^2 \cdot \cos^2 x}} dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx$$

Bài làm :

$$\text{a) Đặt : } t = a^2 \cdot \sin^2 x + b^2 \cdot \cos^2 x \Rightarrow dt = 2(-b^2 + a^2) \sin x \cdot \cos x dx \quad \text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=a^2 \\ x=\frac{\pi}{2} \rightarrow t=b^2 \end{cases}$$

Nếu $|a| \neq |b|$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 x + b^2 \cdot \cos^2 x}} dx = \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{t} \Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{|a| - |b|}{b^2 - a^2} = \frac{1}{|a| + |b|}$$

Nếu $|a| = |b|$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 x + b^2 \cdot \cos^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x dx}{|a|} = \frac{1}{2|a|} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = -\frac{1}{4|a|} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2|a|}$$

$$\text{b) Đặt : } t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx \quad \text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=\frac{\pi}{3} \rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos 2x}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{3 - 2t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2} - t^2}}$$

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos u \Rightarrow dt = -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin u du \quad \text{Đổi cận : } \begin{cases} t = 0 \rightarrow u = \frac{\pi}{2} \\ t = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow u = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2} - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sin u du}{\sqrt{\frac{3}{2} (1 - \cos^2 u)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2}} u \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx$$

Bài làm :

$$\text{a) Đặt : } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right) dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{t^2 + 1} \quad \text{Đổi cận : } \begin{cases} x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} dt = \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{b) Đặt : } \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} = A + B \frac{4 \cos x - 3 \sin x}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} + \frac{C}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}$$

Dùng đồng nhất thức ta được: $A=1, B=1, C=1$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 7 \cos x + 6}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{4 \cos x - 3 \sin x}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} + \frac{1}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} \right) dx \\ &= \left(x + \ln |4 \sin x + 3 \cos x + 5| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + I_1 = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{9}{8} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Bạn đọc tự làm :

$$\text{a) } I_1 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx \quad \text{b) } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \cdot \sin x dx \quad \text{c) } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + 2}$$

$$\text{c) } I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{\cos x + 1} dx \quad \text{d) } I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x + 2 \cos x + 3} dx \quad \text{d) } I_6 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + 1}{\sin x + 2 \cos x + 3} dx$$

Tính nguyên hàm, tích phân các hàm hữu tỷ

Dạng 1 : $I = \int \frac{dx}{(x-a)^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$ với $(a,n) \in C \times (N - \{0,1\})$ ta có :

Nếu $n=1$, $a \in R$ ta có : $I = \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x| + C$

Dạng 2 : $I = \int \frac{\alpha x + \beta}{(ax^2 + bx + c)^n} dx$ trong đó : $\begin{cases} \alpha, \beta, a, b, c \in R \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$

* Giai đoạn 1 : $\alpha \neq 0$, làm xuất hiện ở tử thức đạo hàm của tam thức $ax^2 + bx + c$, sai khác một số :

$$I = \frac{\alpha}{2a} \int \frac{2ax + b + \frac{2a\beta}{\alpha} - b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \frac{\alpha}{2a} \int \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^n} dx + \frac{\alpha}{2a} \left(\frac{2a\beta}{\alpha} - b \right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

* Giai đoạn 2 :

$$\text{Tính } I = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} dx = \left(\frac{4a}{-\Delta} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \int_{t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

* Giai đoạn 3 :

Tính $I = \int \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$ có thể tính bằng hai phương pháp, truy hồi hoặc đặt $t = \tan \phi$

Dạng 3 : $I = \int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$

Ta có : $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$

Nếu : $\deg(P) \geq \deg(Q)$ thì ta thực hiện phép chia $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = A_{(m-n)}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ trong đó phân số $\frac{R_r(x)}{Q_n(x)}$ có $\deg(R) < \deg(Q)$

Nếu : $\deg(P) < \deg(Q)$ ta có các qui tắc sau :

* Qt 1 : $\frac{P_m(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{(x-a)} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \frac{A_n}{(x-a)^n}$

V dụ 1a : $\frac{P_m(x)}{\prod_{i=1}^n (x-a_i)^i} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(x-a_i)^i}$

V dụ 1b : $\frac{P_m(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{(x-c)^2}$

* Qt 2 : $\frac{P_m(x)}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{A_1 x + B_1}{(ax^2 + bx + c)} + \dots + \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$ với $\Delta < 0$

* Qt 3 : $\frac{P_t(x)}{(x-\alpha)^m (ax^2 + bx + c)^n} = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{(x-\alpha)^i} + \sum_{k=1}^n \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$

$$\text{Vdụ 1 : } \frac{P_i(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)}$$

$$\text{Vdụ 2 : } \frac{P_i(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B_1x+C_1}{(ax^2+bx+c)} + \frac{B_2x+C_2}{(ax^2+bx+c)^2}$$

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 3x + 2)^2}$$

Bài làm :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= [\ln|x+1| - \ln|x+2|]_0^1 = \ln \frac{4}{3}$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 3x + 2)^2} = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{(x+1)(x+2)} \right] dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - 2(\ln|x+1| - \ln|x+2|) \right]_0^1 \neq OK$$

Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 3}$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^1 \frac{4x-2}{(x^2+1)(x+2)} dx$$

Bài làm :

a)* Bạn đọc dễ dàng chứng minh được $I_0 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ với $a > 0$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 3} = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\arctan x - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} (9 - 2\sqrt{3})$$

$$\text{b) Đặt : } \frac{4x-2}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{x^2(A+B) + x(2B+C) + 2C+A}{(x+2)(x^2+1)}$$

$$\text{Do đó ta có hệ : } \begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=4 \\ 2C+A=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy : } I_2 &= \int_0^1 \frac{4x-2}{(x^2+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \left(-\frac{2}{x+2} + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left[-2\ln|x+2| + \ln|x^2+1| \right]_0^1 = -2\ln 3 + \ln 2 + \ln 2 - \ln 1 = \ln \frac{4}{9}\end{aligned}$$

Bạn đọc tự làm :

$$\text{a) } I_1 = \int_2^3 \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_2^5 \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

$$\text{c) } I_3 = \int_1^2 \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$$

$$\text{d) } I_3 = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{x}{x^4-3x^2+2} dx$$

HD:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

$$\text{c) } \frac{x^3-1}{4x^3-x} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x-4}{x(2x+1)(2x-1)} \right)$$

$$\text{d) } \frac{x}{x^4-3x^2+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+\sqrt{2}} + \frac{D}{x-\sqrt{2}}$$

Đẳng thức tích phân :

Muốn chứng minh đẳng thức trong tích phân ta thường dùng cách đổi biến số và nhận xét một số đặc điểm sau .

* Cận tích phân , chẵn lẻ , tuần hoàn , cận trên + cận dưới,

Chúng ta cần phải nhớ những đẳng thức này và xem nó như 1 bổ đề áp dụng.

BÀI TẬP

$$\text{Chứng minh rằng : } \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$$

Bài làm :

$$\text{Xét } I = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

$$\text{Đặt : } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=1 \\ x=1 \rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = - \int_1^0 (1-t)^m t^n dt = \int_0^1 (1-t)^m t^n dt \text{ (đpcm)}$$

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là hàm lẻ và liên tục trên đoạn $[-a, a]$ thì :

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

Bài làm :

$$I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad (1)$$

Xét $\int_{-a}^0 f(x)dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = -a \rightarrow t = a \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt$$

Thế vào (1) ta được : $I = 0$ (đpcm)

👉 Tương tự bạn đọc có thể chứng minh : Nếu $f(x)$ là hàm chẵn và liên tục trên đoạn

$$[-a, a] \text{ thì } I = \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Cho $a > 0$ và $f(x)$ là hàm chẵn , liên tục và xác định trên R .

Chứng minh rằng : $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^a f(x)dx$

Bài làm :

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx \quad (1)$$

Xét $\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx$. Đặt $t = -x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = -a \rightarrow t = a \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_a^0 \frac{f(-t)}{a^{-t} + 1} dt = \int_0^a \frac{a^t f(t)}{a^t + 1} dt$$

Thế vào (1) ta được : $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_{-a}^0 \frac{a^x f(x)}{a^x + 1} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \int_0^a f(x)dx$ (đpcm)

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng :

$$\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

Bài làm :

Xét $\int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx$. Đặt $t = \pi - x \Rightarrow dt = -dx \Rightarrow dx = -dt$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=\pi \\ x=\pi \rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (\pi - t) \cdot f[\sin(\pi - t)] dt = \int_0^{\pi} (\pi - t) \cdot f(\sin t) dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} t \cdot f(\sin t) dt$$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$$

✚ Từ bài toán trên , bạn đọc có thể mở rộng bài toán sau .

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ và $f(a+b-x) = f(x)$. Thì ta luôn có :

$$\int_a^b x \cdot f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

Cho hàm số $f(x)$ liên tục, xác định , tuần hoàn trên R và có chu kì T .

Chứng minh rằng : $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$

Bài làm :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx + \int_0^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx$$

$$\text{Vậy ta cần chứng minh } \int_0^a f(x) dx = \int_T^{a+T} f(x) dx$$

Xét $\int_0^a f(x) dx$. Đặt $t = x + T \Rightarrow dt = dx$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=T \\ x=a \rightarrow t=a+T \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_T^{a+T} f(t-T)dt = \int_T^{a+T} f(t)dt$$

$$\text{Hay : } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \text{ (đpcm)}$$



Từ bài toán trên, ta có hệ quả sau :

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục, xác định, tuần hoàn trên R và có chu kỳ T , thì ta luôn

$$\text{có : } \int_0^T f(x)dx = \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$$

Bạn đọc tự làm :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 x(1-x)^6 dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{-1}^1 \sin^2 x \cdot \cos x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx$$

$$\text{c) } I_3 = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{9 + 4 \cos^2 x} dx$$

$$\text{d) } I_4 = \int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

$$\text{e) } I_5 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2 |\sin x|}{1 + 2^x} dx$$

$$\text{f) } I_6 = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + \sin x}{1 + x^2} dx$$

$$\text{g) } I_7^* = \int_0^{2\pi} \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}) dx$$

$$\text{h) } I_8^* = \int_0^{2009\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx$$

Tích phân từng phần :

Cho hai hàm số u và v có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$, thì ta có :

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

Trong lúc tính tích phân từng phần ta có những ưu tiên sau :

*ưu tiên 1: Nếu có hàm $\ln$ hay logarit thì phải đặt $u = \ln x$ hay $u = \log_a x$.

*ưu tiên 2: Đặt $u = ??$ mà có thể hạ bậc.

BÀI TẬP

Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 x \cdot e^x dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x dx$$

$$\text{c) } I_3 = \int_1^e \ln x dx$$

Bài làm :

$$\text{a) Đặt : } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^1 x.e^x dx = x.e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

$$\text{b) Đặt : } \begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^1 x.e^x dx = -x.\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx \quad (1)$$

Ta đi tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\sin x dx = -x.\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = -x.\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Thế vào (1) ta được : } I_1 = \int_0^1 x.e^x dx = \frac{\pi^2 - 8}{4}$$

$$\text{c) Đặt : } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_3 = \int_1^e \ln x dx = x.\ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x.\ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e = 1$$

Tính các tích phân sau :

$$\text{a) } I_1 = \int_0^{\pi} e^x . \sin x dx \quad \text{b) } I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \text{c) } I_3 = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$$

Bài làm :

$$\text{a) Đặt : } \begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } I_1 = \int_0^{\pi} e^x . \sin x dx = -e^x . \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x . \cos x dx = e^{\pi} + 1 + J \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } J = \int_0^{\pi} e^x . \cos x dx = e^x . \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x . \sin x dx = -I$$

Thế vào (1) ta được : $2I_1 = e^\pi + 1 \Rightarrow I_1 = \frac{e^\pi + 1}{2}$

b) Đặt :
$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

Vậy :
$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = x \cdot \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{4} + \ln(\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Đặt :
$$\begin{cases} u = \cos(\ln x) \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x) dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Vậy :
$$I_3 = \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = x \cdot \cos(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx = -(e^\pi + 1) + J$$

Đặt :
$$\begin{cases} u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$$

Vậy :
$$I_3 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) dx = x \cdot \sin(\ln x) \Big|_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln x) dx = 0 - I_3$$

Thế vào (1) ta được : $2I_3 = -(e^\pi + 1) \Rightarrow I_3 = -\frac{e^\pi + 1}{2}$

Bạn đọc tự làm :

a) $I_1 = \int_0^{\ln 2} x \cdot e^{-x} dx$

b) $I_2 = \int_1^e (1 - \ln x)^2 dx$

c) $I_3 = \int_e^2 \left(\frac{1}{\ln^2 x} - \frac{1}{\ln x} \right) dx$

d) $I_4 = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

e) $I_5 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \ln(\tan x) dx$

f) $I_6 = \int_1^e \cos^2(\ln x) dx$

g) $I_7^* = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x$

h) $I_7^* = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$

Tích phân hàm trị tuyệt đối, min , max :

Muốn tính $I = \int_a^b |f(x)| dx$ ta đi xét dấu $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$, khử trị tuyệt đối

Muốn tính $I = \int_a^b \max[f(x), g(x)] dx$ ta đi xét dấu $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a, b]$

Muốn tính $I = \int_a^b \min[f(x), g(x)]dx$ ta đi xét dấu $f(x) - g(x)$ trên đoạn $[a, b]$

Tính các tích phân sau :

$$a) I_1 = \int_1^4 |x-2|dx$$

$$b) I_1 = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3|dx$$

Bài làm :

$$a) \begin{array}{c|ccc} x & 1 & 2 & 4 \\ \hline x-2 & & - & 0 & + \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } I_1 &= \int_1^4 |x-2|dx = \int_1^2 (2-x)dx + \int_2^4 (x-2)dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^4 \\ &= \left[(4-2) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \right] + \left[(8-8) - (2-4) \right] = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

b) Lập bảng xét dấu $x^2 + 2x - 3$, $x \in [0, 2]$ tương tự ta được

$$I_1 = \int_0^2 |x^2 + 2x - 3|dx = -\int_0^1 (x^2 + 2x - 3)dx + \int_1^2 (x^2 + 2x - 3)dx$$

$$I_1 = \left[3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[-3x + x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 4$$

Tính $I_a = \int_0^1 x|x-a|dx$ với a là tham số :

Bài làm :

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & a & +\infty \\ \hline x-a & - & 0 & + \end{array}$$

(Từ bảng xét dấu trên ta có thể đánh giá).

Nếu $a \leq 0$.

$$I_a = \int_0^1 x|x-a|dx = \int_0^1 (x^2 - ax)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$$

Nếu $0 < a < 1$.

$$I_a = \int_0^1 x|x-a|dx = -\int_0^a (x^2 - ax)dx + \int_a^1 (x^2 - ax)dx$$

$$= \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a + \left[-\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_a^1 = \frac{1}{3} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2}$$

Nếu $a \geq 1$.

$$I_a = \int_0^1 x|x-a|dx = -\int_0^1 (x^2 - ax)dx = -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{a}{2}$$

Tính : a) $I_1 = \int_0^2 \min(1, x^2)dx$

$$I_2 = \int_0^3 \max(x^2, x)dx$$

Bài làm :

a) Xét hiệu số : $(1 - x^2) \quad \forall x \in [0, 2]$

Vậy : $I_1 = \int_0^2 \min(1, x^2)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{4}{3}$

b) Xét hiệu số : $x(x-1) \quad \forall x \in [0, 3]$ tương tự như trên ta có .

$$I_2 = \int_0^3 \max(x^2, x)dx = \int_0^1 x dx + \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_1^3 = \frac{55}{6}$$

Bạn đọc tự làm :

a) $I_1 = \int_{-2}^3 \min(x, x^2 - 3)dx$ b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \max(\sin x, \cos x)dx$ c) $I_3 = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x - \cos x|dx$

d) $I_4 = \int_{-2}^3 \max(x^2, 4x - 3)dx$ d) $I_4^* = \int_1^5 \left(\sqrt{x+2}\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}\sqrt{x-1} \right) dx$

Nguyên hàm , tích phân của hàm số vô tỷ :

Trong phần này ta chỉ nghiên cứu những trường hợp đơn giản của tích phân Abel

Dạng 1: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ ở đây ta đang xét dạng hữu tỷ.

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \rightarrow ax^2 + bx + c = \frac{-\Delta}{4a} \left[1 + \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right]$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int_{t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}} S(t, \sqrt{1+t^2})dt \quad \text{Tới đây, đặt } t = \tan u.$$

$$\text{Dạng 2: } \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \rightarrow ax^2 + bx + c = \frac{-\Delta}{4a} \left[1 - \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 \right]$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int_{t=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}} S(t, \sqrt{1-t^2})dt \quad \text{Tới đây, đặt } t = \sin u.$$

Dạng 3: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \rightarrow ax^2 + bx + c = \frac{\Delta}{4a} \left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right)^2 - 1 \right]$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int_{t=\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}} S(t, \sqrt{t^2 - 1}) dt \text{ Tới đây, đặt } t = \frac{1}{\sin u}.$$

Dạng 4 (dạng đặc biệt): $\int \frac{dx}{(ax + \beta)\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int_{t=\frac{1}{ax+\beta}} \frac{dt}{\sqrt{\alpha t^2 + \mu t + \zeta}}$

Một số cách đặt thường gặp:

$$\int S(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \quad \text{đặt } x = a \cdot \cos t \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$\int S(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \quad \text{đặt } x = a \cdot \tan t \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$\int S(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad \text{đặt } x = \frac{a}{\cos t} \quad t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int S(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \quad \text{đặt } \begin{cases} \sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} & ; c > 0 \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0) & ; ax_0 + bx_0 + c = 0 \\ \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} \cdot x \pm t & ; a > 0 \end{cases}$$

$$\int S\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \quad \text{đặt } t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} ; ad - cb \neq 0$$

Tính: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}}$

Bài làm:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4x + 7)^3}} = \int_{t=x+2} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 3)^3}}$$

Đặt: $t = \sqrt{3} \tan u \Rightarrow dt = \sqrt{3}(\tan^2 u + 1) du$

Ta có
$$I = \int_{\sqrt{3} \tan u} \frac{\sqrt{3}(\tan^2 u + 1) du}{3\sqrt{3} \cdot \sqrt{(\tan^2 u + 1)^3}} = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{3} \tan u} \cos u du$$

$$= \frac{1}{3} \sin u + C = \frac{1}{3} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + C = \frac{1}{3} \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}} + C$$

Tính: a) $I = \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ b) $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 2x - 1}}$

Bài làm :

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{xdx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \frac{1}{2} \int_{t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}t-1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ I &= \frac{1}{2} \int_{t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}t-1}{\sqrt{t^2+1}} dt = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2} \ln(t + \sqrt{t^2+1}) + C \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} + \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Đặt : } x &= \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \\ I &= \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}} = - \int_{x=\frac{1}{t}} \frac{dt}{\sqrt{2-(t+1)^2}} = -\arcsin \frac{t+1}{\sqrt{2}} + C \\ &= -\arcsin \frac{\frac{1}{t}+1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C \end{aligned}$$

Tìm các nguyên hàm sau

$$\text{a) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+\sqrt[3]{1+x}}} \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}}$$

Bài làm :

$$\text{a) Đặt : } t = \sqrt[6]{1+x} \Rightarrow t^6 = 1+x \Rightarrow 6t^5 dt = dx$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } I &= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+\sqrt[3]{1+x}}} = 6 \int_{t=\sqrt[6]{1+x}} \frac{t^5 dt}{t^3+t^2} = 6 \int_{t=\sqrt[6]{1+x}} \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C \\ &= 2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} - 6\ln|\sqrt[6]{1+x}+1| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I &= \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int \left(x^{\frac{1}{2}} + 1 \right) dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx \\ &= \frac{1}{2} x + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx \quad \text{Đặt : } t = \sqrt{\frac{x+1}{x}} \Rightarrow x = \frac{1}{t^2-1} \Rightarrow dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$\text{Vậy : } \int \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = -2 \int_{t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}} \frac{t^2 dt}{(t-1)^2} = OK$$

Tìm các nguyên hàm sau :

$$a) I = \int x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 9} dx$$

$$b) I = 16 \int x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4} dx$$

Bài làm :

$$a) \text{Đặt : } \sqrt{x^2 + 9} = x - t \Rightarrow x = \frac{t^2 - 9}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2 + 9}{2t^2} dt$$

$$I_1 = \int \left(\frac{t^2 + 9}{2t^2} \right) \left(\frac{-t^2 - 9}{2t} \right) \cdot \frac{(t^2 - 9)^2}{4t^2} dt = -\frac{1}{16} \int \frac{(t^4 - 81)^2}{t^5} dt$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } &= -\frac{1}{16} \int \left(t^3 - \frac{162}{t} + \frac{6561}{t^5} \right) dt = -\frac{1}{16} \left(\frac{t^4}{4} - 162 \ln|t| - \frac{6561}{4t^4} \right) + C \\ &= -\frac{1}{16} \left(\frac{(x - \sqrt{x^2 + 9})^4}{4} - 162 \ln|x - \sqrt{x^2 + 9}| - \frac{6561}{4(x - \sqrt{x^2 + 9})^4} \right) + C \end{aligned}$$

$$b) \text{Đặt : } \sqrt{x^2 + 4} = x - t \Rightarrow x = \frac{t^2 - 4}{2t} \Rightarrow dx = \frac{t^2 + 4}{2t^2} dt$$

$$I = 16 \int \left(\frac{t^2 + 4}{2t^2} \right) \left(\frac{-t^2 - 4}{2t} \right) \cdot \frac{(t^2 - 4)^2}{4t^2} dt = -\int \frac{(t^4 - 16)^2}{t^5} dt$$

$$= -\int \left(t^3 - \frac{36}{t} + \frac{256}{t^5} \right) dt = -\left(\frac{t^4}{4} - 36 \ln|t| - \frac{64}{t^4} \right) + C$$

$$= -\left(\frac{(x - \sqrt{x^2 + 4})^4}{4} + 36 \ln|x - \sqrt{x^2 + 4}| - \frac{64}{(x - \sqrt{x^2 + 4})^4} \right) + C$$

Tính các tích phân sau :

$$a) I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x - x^2} dx$$

$$b) I_2 = \int_{-3}^{-8} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$

Bài làm :

$$I_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x - x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - (2x - 1)^2} dx$$

$$\text{Đặt : } 2x - 1 = \sin t \Rightarrow dx = \frac{1}{2} \cos t dt$$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \rightarrow t = 0 \\ x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } I_1 &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{8} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{8} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 + 0) \right] = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

$$\text{b) Đặt : } t = \sqrt{1-x} \Rightarrow -2tdt = dx$$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = -3 \rightarrow t = 2 \\ x = -8 \rightarrow t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } I_2 &= \int_{-3}^{-8} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = 2 \int_2^3 \frac{tdt}{(1-t^2)t} = 2 \int_2^3 \frac{dt}{1-t^2} \\ &= -\ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = -\left(\ln \frac{1}{2} - \ln 1 \right) = \ln 2 \end{aligned}$$

Bạn đọc tự làm :

$$\text{a) } I_1 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{b) } I_2 = \int \sqrt{4x-x^2} dx$$

$$\text{c) } I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$\text{d) } I_4 = \int \sqrt{1+x^2} dx$$

$$\text{d) } I_5^* = \int \frac{1+\sqrt{x^2-1}}{1-\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\text{d) } I_6^* = \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}} dx$$

Bất đẳng thức tích phân :

$$\text{Nếu } f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\text{Nếu } f(x) \geq g(x) \forall x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{Nếu } m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Trong các trường hợp này ta thường dùng khảo sát, Bunhiacopski, AM-GM
Và các bước chặn $\sin x, \cos x$

BÀI TẬP

Chứng minh các bất đẳng thức sau :

$$a) \int_0^1 x(1-x)dx \leq \frac{1}{4}$$

$$b) \frac{2}{5} \leq \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx \leq \frac{1}{2}$$

$$c) \int_0^1 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx \leq 2$$

Bài làm:

a) Áp dụng AM-GM ta có :

$$x(1-x) \leq \left[\frac{x+(1-x)}{2} \right]^2 = \frac{1}{4} \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\text{Vậy : } \int_0^1 x(1-x)dx \leq \frac{1}{4} \int_0^1 dx = \frac{1}{4} \quad (\text{đpcm})$$

b) Xét hàm số : $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad \forall x \in [1,2]$

Đạo hàm :

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} \\ f(2) = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\frac{2}{5} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in [1,2]$$

$$\text{Vậy : } \Rightarrow \frac{2}{5} \int_1^2 dx \leq \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx \leq \frac{1}{2} \int_1^2 dx$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} \leq \int_1^2 \frac{x}{x^2+1} dx \leq \frac{1}{2}$$

Áp dụng Bunhiocpxki ta có :

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \leq \sqrt{1^2+1^2} \sqrt{1+x+1-x} = 2 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\text{Vậy : } \int_0^1 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx \leq 2(1-0)$$

$$\int_0^1 (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) dx \leq 2 \quad (\text{đpcm})$$

Chứng minh rằng : $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \cdot \sin x}{x^2+1} dx < \frac{\pi}{12e}$

Bài làm :

$$\forall x \in [1, \sqrt{3}] \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-x} \cdot \sin x}{x^2 + 1} < \frac{1}{e(x^2 + 1)} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} \cdot \sin x}{x^2 + 1} dx < \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e(x^2 + 1)} dx$$

$$\text{Xét } \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{e(x^2 + 1)} dx$$

$$\text{Đặt : } x = \tan t \Rightarrow dx = (\tan^2 t + 1) dt$$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{4} \\ x = \sqrt{3} \rightarrow t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\tan^2 t + 1) dt}{e(\tan^2 t + 1)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{e} = \frac{\pi}{12}$$

Từ đó ta được đpcm.

Bạn đọc tự làm :

Chứng minh rằng :

$$\text{a) } \frac{\pi}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x} \leq \frac{\pi}{10} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{4} < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2} \quad \text{c) } \frac{\pi}{6} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

d*) Cho 2 hàm số liên tục : $f : [0,1] \rightarrow [0,1]; g : [0,1] \rightarrow [0,1]$

$$\text{Chứng minh rằng : } \left[\int_0^1 f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 g(x)dx$$

Một số ứng dụng của tích phân thường gặp :

1) Tính diện tích :

Cho hai hàm số $f(x)$ & $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường là :

$$\begin{cases} x = a \\ y = f(x) \end{cases} ; \begin{cases} x = b \\ y = g(x) \end{cases}$$

Được tính như sau :

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

2) Tính thể tích :

- ✚ Nếu diện tích $S(x)$ của mặt cắt vật thể do mặt phẳng vuông góc với trục tọa độ, là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì thể tích vật thể được tính :

$$V = \int_a^b f(x) dx$$

- ✚ Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$\begin{cases} x = a, x = b \\ y = f(x) \\ Ox \end{cases}$$

Khi (H) quay quanh Ox ta được 1 vật thể tròn xoay. Lúc đó thể tích được tính :

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Tương tự ta cũng có thể tính thể tích vật thể quay quanh Oy

3) Tính giới hạn :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx \text{ trong đó } \begin{cases} x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \end{cases}$$

Từ đó ta xây dựng bài toán giới hạn như sau :

Viết dãy số thành dạng : $S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right)$ sau đó lập phân hoạch đều trên $[0, 1]$, chọn

$$\xi_i = x_i = \frac{i}{n} \text{ ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$$

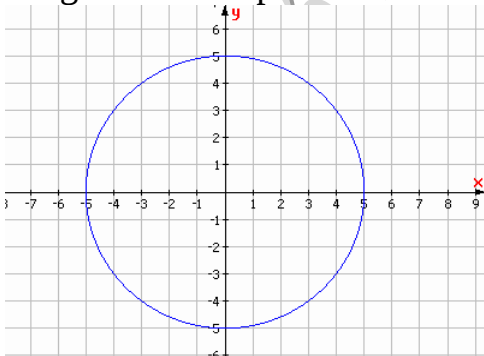
4) Tính độ dài cung đường cong tròn:

Nếu đường cong tròn cho bởi phương trình $y = f(x)$ thì độ dài đường cung nó được tính như sau :

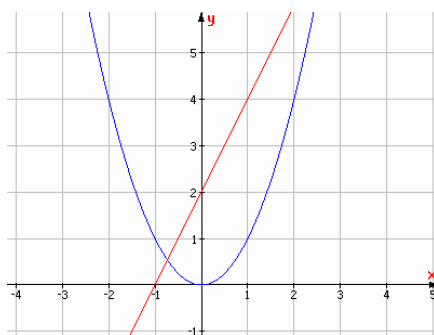
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \text{ với } a, b \text{ là hoành độ các điểm đầu cung.}$$

4) Tính tổng trong khai triển nhị thức Newton.

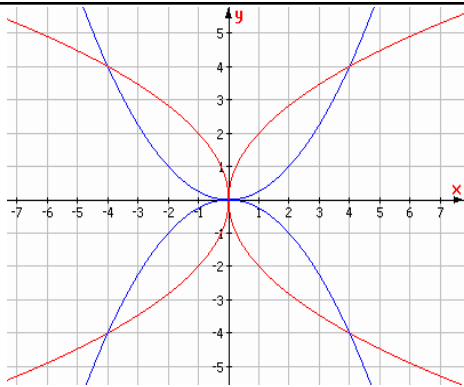
Tìm công thức tổng quát, chọn số liệu thích hợp, sau đó dùng đồng nhất thức, bước cuối cùng là tính tích phân.



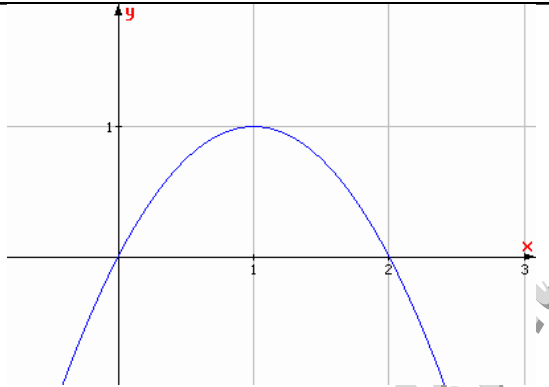
Hình 1a



hình 1b



hình1c



hình1d

BÀI TẬP

Tính diện tích hình tròn , tâm O , bán kính R.

Bài làm : (hình 1a)

Phương trình đường tròn có dạng :

$$x^2 + y^2 = R^2 \Leftrightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

Do tính đối xứng của đồ thị nên : $S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$

Đặt : $x = R \sin t \Rightarrow dx = R \cos t dt$

$$\text{Đổi cận : } \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=R \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \rightarrow t=0 \\ x=R \rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - \sin^2 t} R \cos t dt = 2R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt$$

Vậy :

$$= 2R^2 \left(x + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^2 \quad (dvd t)$$

Xét hình chắn phía dưới bởi Parabol $y = x^2$, phía trên bởi đường thẳng đi qua điểm A(1,4) và hệ số góc là k . Xác định k để hình phẳng trên có diện tích nhỏ nhất .

Bài làm (hình 1b)

Phương trình đường thẳng có dạng.

$$y = k(x-1) + 4$$

Phương trình hoành độ giao điểm .

$$x^2 = k(x-1) + 4 \Leftrightarrow x^2 - kx + k - 4 = 0$$

Phương trình trên luôn có hai nghiệm , giả sử $x_1 < x_2$

Vậy diện tích là :

$$S = \int_{x_1}^{x_2} [k(x-1) + 4 - x^2] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{k}{2}x^2 + (4-k)x \right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= (x_2 - x_1) \left[-\frac{1}{3}(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + \frac{1}{2}k(x_2 + x_1) + (4-k) \right] \quad (*)$$

Với :
$$\begin{cases} x_2 + x_1 = k \\ x_2 \cdot x_1 = k - 4 \\ (x_2 - x_1)^2 = (x_2^2 + x_1^2)^2 - 4x_2 \cdot x_1 = k^2 - 4(k - 4) \end{cases}$$

Thế vào (*) ta được :

$$S = \sqrt{k^2 - 4k + 16} \left[-\frac{1}{3}(k^2 - 4k + 4) + \frac{1}{2}k^2 + (4-k) \right]$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{k^2 - 4k + 16} (k^2 - 4k + 16)$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{(k^2 - 4k + 16)^3} = \frac{1}{6} \sqrt{[(k-2)^2 + 12]^3} \geq 4\sqrt{3}$$

Vậy : $\min S = 4\sqrt{3}$ khi $k = 2$

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$\begin{cases} ax = y^2 \\ ay = x^2 \end{cases}$$

Bài làm : (hình 1c)

Do tính chất đối xứng của đồ thị mà ta chỉ cần xét $a > 0$

Xét :
$$\begin{cases} ax = y^2 \\ ay = x^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+a) = 0 \\ ay = x^2 \\ a > 0 \end{cases}$$

Với $x = y$ ta được :

$$\begin{cases} x = y \\ ay = x^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & (n) \\ x = 0 & (l) \end{cases}$$

Với $x + y + a = 0$ ta được :

$$\begin{cases} x + y + a = 0 \\ ay = x^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + a^2 = 0 \\ ay = x^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a & (n) \\ x = 0 & (l) \end{cases}$$

Ta lại có :

$$\begin{cases} ax = y^2 \\ ay = x^2 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\sqrt{ax} \\ y = \frac{x^2}{a} \\ a > 0 \end{cases}$$

Vậy diện tích cần tính là :

$$S = \int_0^a \left[\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right] dx = \int_0^a \left[\sqrt{a} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{a} \right] dx$$

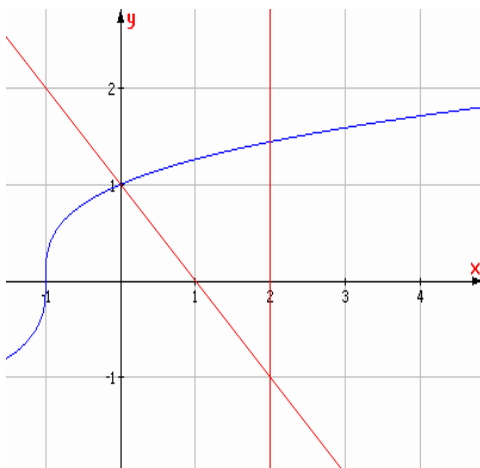
$$= \left[\frac{3}{2} \sqrt{a} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a} \right]_0^a = \frac{1}{3} a^2 \quad (dvt)$$

Bạn đọc tự làm :

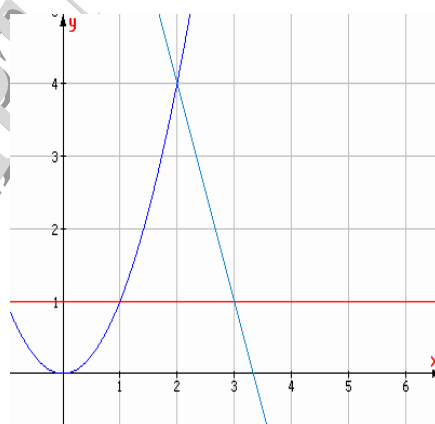
Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

a) $\begin{cases} x - y^3 + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 4x \\ y = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x + y - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ a, b \neq 0 \end{cases}$

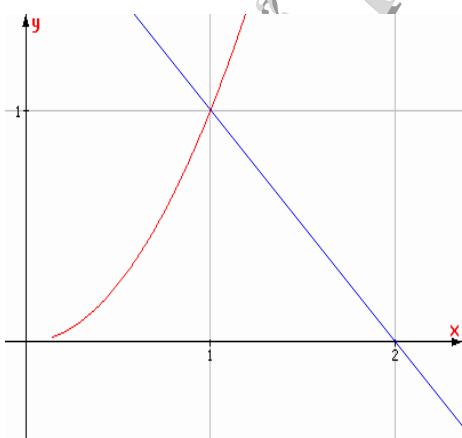
Hình vẽ tương ứng ↓↓↓



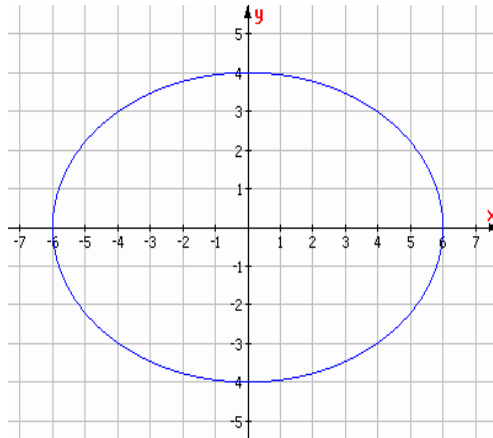
hình a



hình b



hình c



hình d

Với mỗi số nguyên dương n ta đặt :

$$S_n = \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5}{n^6}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Bài làm :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^5 + \left(\frac{2}{n}\right)^5 + \left(\frac{3}{n}\right)^5 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^5 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^5 \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x^5 \quad \forall x \in [0, 1]$.

Ta lập phân hoạch đều trên $[0, 1]$ với các điểm chia :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1 \text{ và chiều dài phân hoạch } l = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Chọn } \xi_i = x_i = \frac{i}{n} \text{ ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^5$$

$$\Rightarrow \lim_{l \rightarrow 0} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

Với mỗi số nguyên dương n ta đặt :

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Bài làm :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1} + \frac{1}{\frac{2}{n} + 1} + \frac{1}{\frac{3}{n} + 1} + \dots + \frac{1}{\frac{n}{n} + 1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\frac{i}{n} + 1} \right) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \forall x \in [0, 1]$.

Ta lập phân hoạch đều trên $[0, 1]$ với các điểm chia :

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$ và chiều dài phân hoạch $l = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$

Chọn $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}$ ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{\frac{i}{n} + 1} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{l \rightarrow 0} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| \Big|_0^1 = \ln 2$$

Tổ Toán - THPT Nguyễn Thái Bình